РГР3. Линейные операторы и квадратичные формы

Общее уравнение второго порядка

Рассмотрим теперь общее уравнение второй степени с двумя неизвестными, заданной в ортонормированной системе координат $(O;e_1,e_2)$:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+gy+f=0 \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+f=0.$$

1. Путем поворота координатных осей на угол α, можно преобразовать это уравнение к неполному, чтобы в нем член bxy с произведением координат отсутствовал.

Для этого необходимо перейти к координатной системе, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов матрицы $A=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ квадратичной формы $ax^2+bxy+cy^2$.

Пусть ортогональный оператор с матрицей S в базисе (e_1,e_2) приводит квадратичную форму $ax^2+bxy+cy^2$ к каноническому виду $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$ в ортонормированном базисе (e_1',e_2'). Тогда уравнение линии (2) в этом базисе примет вид:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+f=0$$

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+d'\cdot x'+g'\cdot y'+f=0 \qquad (3)$$

(в предположении, что $\lambda_{1,2}$ не равны 0).

2. Затем, чтобы избавиться от линейных слагаемых, выполним переход к системе координат $(O_1;e_1',e_2')$ параллельным переносом системы $(O;e_1',e_2')$. Формулы преобразования получим через выделение полных квадратов в (3)

$$\lambda_1\left(x'^2+\frac{d'}{\lambda_1}x'\right)+\lambda_2\left(y'^2+\frac{g'}{\lambda_2}y'\right)+f=$$

$$=\lambda_1\left(x'+\frac{d'}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{g'}{2\lambda_2}\right)^2-\frac{d'^2}{4\lambda_1}-\frac{g'^2}{4\lambda_2}+f=0,$$

$$x''=x'+\frac{d'}{2\lambda_1},\quad y''=y'+\frac{g'}{2\lambda_2},\quad f''=\frac{d'^2}{4\lambda_1}+\frac{g'^2}{4\lambda_2}-f.$$

В результате каноническое уравнение кривой 2-го порядка в системе координат $(O_1;e_1',e_2')$ примет вид:

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2=f''. \qquad (4)$$

Это уравнение определяет одну из линий (фигур) 2-го порядка. При этом, в зависимости от значений собственных чисел квадратичной формы

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-\frac{b^2}{4}=0, \qquad (5)$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} \lambda-\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda_2 \end{vmatrix}=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2=0,$$

и значения свободного члена f'', возможны следующие случаи.

1. Если $ac-(b/2)^2>0$, что эквивалентно $\lambda_1\lambda_2>0$, то уравнение определяет фигуру эллиптического типа:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ - эллипс;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$ - точка (вырожденный эллипс);

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$ - пустое множество точек (мнимый эллипс).

2. Если $ac-(b/2)^2<0$, что эквивалентно $\lambda_1\lambda_2<0$, то уравнение определяет фигуру гиперболического типа:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$$ - гиперболы;

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$$ - пара пересекающихся прямых.

3. Если $ac-(b/2)^2=0$, что эквивалентно $\lambda_1\lambda_2=0$, то уравнение определяет фигуру параболического типа:

$$y^2=2px \quad (x^2=2py),(p\neq0)$$ - параболы;

$$y^2=a^2 \quad (x^2=a^2),(a\neq0)$$ - пара параллельных прямых;

$$y^2=0 \quad (x^2=0)$$ - пара совпадающих прямых;

$$y^2=-a^2 \quad (x^2=-a^2),(a\neq0)$$ - пустое множество точек.

Пример 1. (Задание 1) Привести к каноническому виду уравнение

$$5x^2+24xy-5y^2+6\sqrt{13}x+4\sqrt{13}y+13=0$$

и построить, соответствующую ему фигуру.

Решение. Запишем данное уравнение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6\sqrt{13} & 4\sqrt{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+13=0.$$

Найдем собственные числа квадратичной формы

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 12 \\ 12 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(5+\lambda)-144 = \lambda^2-169=0. \quad \lambda_1=13;\ \lambda_2=-13.$$

Определим диагонализирующую матрицу S_0 из нормированных собственных векторов.

Для $\lambda_1 = 13$ имеем

$$\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad -2x+3y=0; \quad x=\frac{3}{2}y; \quad v_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}c,\ c\neq 0.$$

Нормируя, получим $v_{10} = \left(3/\sqrt{13} \quad 2/\sqrt{13}\right)^T$.

Для $\lambda_2 = -13$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 3x+2y=0; \quad x=-\frac{2}{3}y; \quad v_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}c,\ c\neq 0.$$

Нормируя, получим $v_{20} = \left(2/\sqrt{13} \quad -3/\sqrt{13}\right)^T$.

Матрица, приводящая квадратичную форму к каноническому виду, должна быть ортогональной: $(v_{10}, v_{20}) = 0,\ \det S_0 = 1$.

Для матрицы $S_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ второе условие не выполняется $\det S_1 = -1$, поэтому изменим направление второго вектора на противоположное, получим:

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad \det S_0 = 1.$$

Новый базис (e_1', e_2') определяется векторами $(e_1', e_2') = (e_1, e_2)S_0$:

$$e_1' = \frac{3}{\sqrt{13}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{13}}e_2; \quad e_2' = \frac{-2}{\sqrt{13}}e_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}e_2.$$

Новый базис развернут относительно старого на угол $\varphi = arctg\frac{s_{21}}{s_{11}}$. В развернутой на $\varphi = arctg\frac{2}{3} = 33,7^0$ системе координат $(O; e_1', e_2')$ уравнение кривой примет вид (3):

$$13x'^2 - 13y'^2 + \left(6\sqrt{13} \quad 4\sqrt{13}\right)\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 13 = 0.$$

После преобразований получим $13x'^2 - 13y'^2 + 26x' + 13 = 0$.

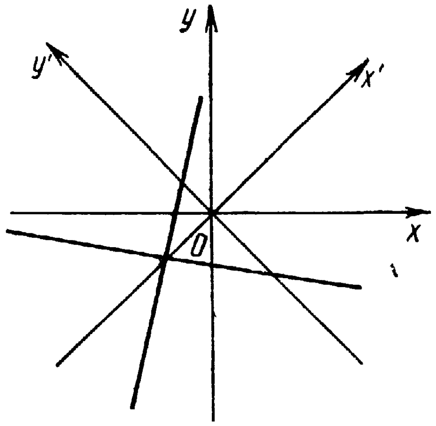
Перенесем начало системы координат $(O; e_1', e_2')$ выделив полные квадраты

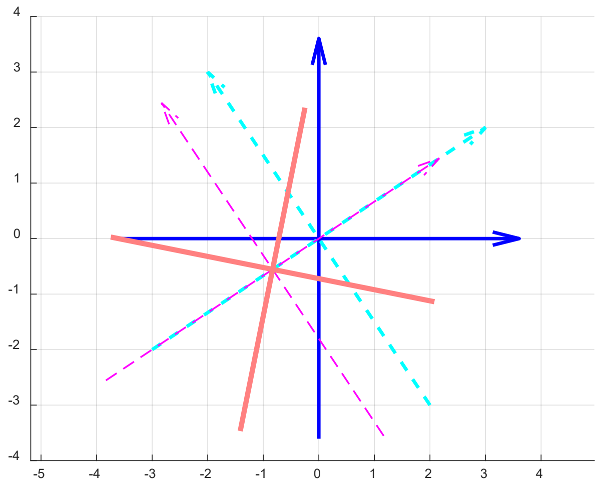
$13(x'+1)^2 - 13y'^2 = 0$. $\qquad x''^2 - y''^2 = (x''-y'')(x''+y'') = 0,$

где $x'' = x'+1;\ y'' = y'$, или $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Полученному уравнению, а значит и исходному, соответствует пара пересекающихся прямых, которые в системе $\left(O_1;e_1',e_2'\right)$ имеют вид $y''=\pm x''$, или в системе $\left(O;e_1',e_2'\right): y'=\pm\left(x'+1\right)$. Для построения линии необходимо сначала с помощью разворота на заданный угол построить систему $\left(O;e_1',e_2'\right)$, а затем сместить ее на вектор (-1 0) для получения $\left(O_1;e_1',e_2'\right)$. В последней построить две прямые. На рисунке представлена полученная фигура.

(D:\СГАУ Математика\ЛА и АГ\KvadrForm.m)





Связь координат точек в используемых системах координат примет вид:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=S_0^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оси симметрии фигуры параллельны базисным векторам $\left(e_1',e_2'\right)$. Их уравнения в исходной системе $\left(O;e_1,e_2\right)$ получаются из условий:

$x''=0$ для $\left(Oe_2'\right)$, откуда $\frac{1}{\sqrt{13}}\left(3x+2y\right)+1=0$ и $y=-\frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{13}}{2}$

и $y''=0$ для $\left(Oe_1'\right)$, откуда $\frac{1}{\sqrt{13}}\left(-2x+3y\right)=0$ и $y=\frac{2}{3}x$.

Координаты точки O_1 в старой системе координат находятся из условий

$\left(x''\ y''\right)=\left(0\ \ 0\right)$, откуда $\begin{cases} 3x+2y=-\sqrt{13} \\ -2x+3y=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-3/\sqrt{13}; \\ y=-2/\sqrt{13}. \end{cases}$

Пример 2. (Задание 1) Привести к каноническому виду уравнение

$$17x^2+12xy+8y^2+20\sqrt{5}x+20=0$$

и построить, соответствующую ему фигуру.

Решение: Запишем данное уравнение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 20\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+20=0.$$

В примере на стр.63 для квадратичной формы этого уравнения были получены собственные значения $\lambda_1 = 20;\ \lambda_2 = 5$ и диагонализирующая матрица из ортонормированных собственных векторов

$$S_o = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \det(S_o) = 1.$$

Новый базис (e_1', e_2') определяется векторами $(e_1', e_2') = (e_1, e_2)S_0$:

$$e_1' = \frac{2}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}e_2; \quad e_2' = \frac{-1}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}e_2.$$

Новый базис развернут относительно старого на угол $\varphi = arctg\frac{s_{21}}{s_{11}}$. В развернутой на $\varphi = arctg\frac{1}{2} = 26,6^0$ системе координат $(O; e_1', e_2')$ уравнение кривой примет вид:

$$20x'^2 + 5y'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 20\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 20 = 0,$$

или после преобразований: $20x'^2 + 5y'^2 + 40x' - 20y' + 20 = 0$.

Перенесем начало системы координат $(O; e_1', e_2')$ выделив полные квадраты

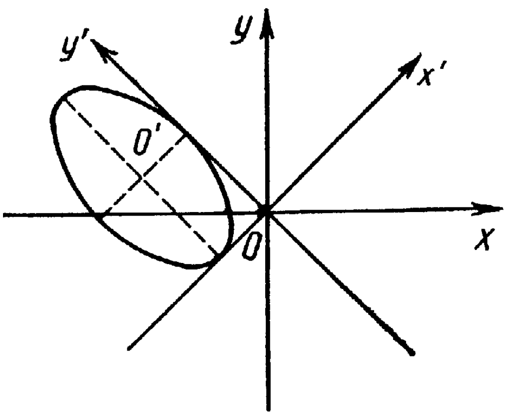
$$20(x'+1)^2 - 20 + 5(y'-2)^2 - 20 + 20 = 0;$$

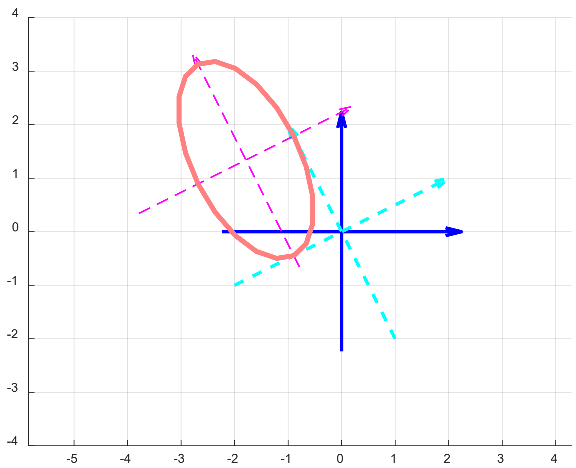
$$4(x'+1)^2 + (y'-2)^2 = 4;$$

$$\frac{(x'+1)^2}{1} + \frac{(y'-2)^2}{2^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{2^2} = 1.$$

Полученному уравнению соответствует эллипс, центр которого находится в точке (-1 2) системы координат $(O; e_1', e_2')$, как показано на рисунке.

(D:\СГАУ Математика\ЛА и АГ\KvadrForm.m)





Связь координат точек в используемых системах координат примет вид:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = S_0^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Оси симметрии эллипса параллельны базисным векторам (e_1', e_2'). Их уравнения в исходной системе $(O; e_1, e_2)$ получаются из условий:

$x'' = 0$ для (Oe_2'), откуда $\frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) + 1 = 0$ и $y = -2x - \sqrt{5}$

и $y'' = 0$ для (Oe_1'), откуда $\frac{1}{\sqrt{5}}(-x + 2y) - 2 = 0$ и $y = \frac{x}{2} + \sqrt{5}$.

Координаты точки O_1 в старой системе координат находятся из условий $(x''\ y'') = (0\ \ 0)$, откуда $\begin{cases} 2x + y = -\sqrt{5} \\ -x + 2y = 2\sqrt{5} \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -4/\sqrt{5}; \\ y = 3/\sqrt{5}. \end{cases}$

Неортогональное преобразование Лагранжа

Привести квадратичную форму, например 3-го порядка,

$$K(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \tag{6}$$

к каноническому виду можно также методом Лагранжа, который заключается выделении полных квадратов. При этом возможны два случая.

1. Хотя бы один из коэффициентов a_{ii} не равен нулю, например $a_{11} \neq 0$. Тогда надо выписать из (6) все слагаемые с x_1 и представить их в виде:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 &= a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2x_1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \right) = \\ &= a_{11}\left(x_1 + \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \right)^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Выражение в скобках первого слагаемого обозначают новой переменной, например $y_1 = x_1 + \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3)$, после чего все выражение (7) подставляют в (6), которое уже не будет содержать переменной x_1.

2. Все коэффициенты $a_{ii} = 0$, но имеется ненулевой коэффициент $a_{ij} \neq 0$. Тогда надо сделать замену переменных:

$$x_i = y_i - y_j; \quad x_j = y_i + y_j; \quad x_k = y_k, \quad k \neq i, j. \tag{8}$$

После подстановки получим выражение

$$2a_{ij}x_ix_j = 2a_{ij}(y_i - y_j)(y_i + y_j) = 2a_{ij}y_i^2 - 2a_{ij}y_j^2$$

содержащее квадраты переменных и переходим к пункту 1.

Обратное для (8) преобразование имеет вид:

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_j); \quad y_j = \frac{1}{2}(x_j - x_i); \quad y_k = x_k, \quad k \neq i, j. \tag{9}$$

Рассмотрим алгоритм этого метода на представленном ниже примере.

Пример 3. (Задание 2) Привести методом Лагранжа квадратичную форму к каноническому виду и матрицу соответствующего преобразования координат, если матрица квадратичной формы в некотором базисе имеет вид

$$K(x) = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Выберем в КФ все члены, содержащие x_1 и выделим в них полный квадрат

$$17x_1^2 + 12x_1x_2 = 17\left(x_1^2 + 2\cdot\frac{6}{17}x_1x_2 + \left(\frac{6}{17}x_2\right)^2 - \left(\frac{6}{17}x_2\right)^2\right) = 17\left(x_1 + \frac{6}{17}x_2\right)^2 - \frac{36}{17}x_2^2.$$

Введем новую переменную $y_1 = x_1 + \frac{6}{17}x_2$ и подставим ее в КФ, которая уже не будет содержать переменной x_1

$$K(x) = 17y_1^2 - \frac{36}{17}x_2^2 + 8x_2^2 = 17y_1^2 + \frac{100}{17}x_2^2.$$

Последовательно выполняя эти операции для всех переменных, получим искомую каноническую форму. Так обозначив $y_2 = x_2$, получим

$$K(y) = 17y_1^2 + \frac{100}{17}y_2^2, \text{ откуда } A_L^* = \begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 100/17 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Найдем матрицу S_L перехода к каноническому базису, учитывая, что нам известна $y = S_L^{-1}x$:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{6}{17}x_2; \\ y_2 = x_2. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6/17 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \qquad (11)$$

$$S_L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6/17 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \to S_L = \begin{pmatrix} 1 & -6/17 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Выполним проверку:

$$S_L^T A S_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6/17 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -6/17 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 100/17 \end{pmatrix} = A_L^*.$$

Пример 4. (Задание 2) Привести методом Лагранжа квадратичную форму к каноническому виду и матрицу соответствующего преобразования координат, если матрица квадратичной формы в некотором базисе имеет вид

$$K(x) = 4x_1x_2 - 5x_2x_3, \text{ здесь } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все коэффициенты $a_{ii} = 0$, поэтому применим преобразование (8)

$$x_1 = y_1 - y_2; \quad x_2 = y_1 + y_2; \quad x_3 = y_3.$$

Получим

$$K(y) = 4y_1^2 - 4y_2^2 - 5y_1y_3 - 5y_2y_3.$$

$$4y_1^2 - 5y_1y_3 = 4\left(y_1 - \frac{5}{8}y_3\right)^2 - \frac{25}{4}y_3^2; \qquad z_1 = y_1 - \frac{5}{8}y_3.$$

$$K = 4y_1^2 - 4y_2^2 - 5y_1y_3 - 5y_2y_3 = 4z_1^2 - \frac{25}{4}y_3^2 - 4y_2^2 - 5y_2y_3;$$

$$-4y_2^2 - 5y_2y_3 = -4\left(y_2 + \frac{5}{8}y_3\right)^2 + \frac{25}{4}y_3^2; \qquad z_2 = y_2 + \frac{5}{8}y_3.$$

$$K = 4z_1^2 - \frac{25}{4}y_3^2 - 4y_2^2 - 5y_2y_3 = 4z_1^2 - \frac{25}{4}y_3^2 - 4z_2^2 + \frac{25}{4}y_3^2;$$

$$K(z) = 4z_1^2 - 4z_2^2 + 0z_3^2, \qquad A_L^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где преобразования координат с учетом (9) примут вид:

$$z_1 = y_1 - \frac{5}{8}y_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{5}{8}x_3; \quad z_2 = y_2 + \frac{5}{8}y_3 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) + \frac{5}{8}x_3; \quad z_3 = y_3 = x_3.$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -5/8 \\ -1/2 & 1/2 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad S_L = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -5/8 \\ -1/2 & 1/2 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку:

$$S_L^T A S_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5/4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_L^*.$$

Пример 5. (Задание 3) Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием

$$2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Решение.

Матрица КФ имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные числа данной матрицы из характеристического уравнения:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0.$$

Будем искать корни уравнения среди целых чисел – делителей свободного члена: ± 1; ± 3; ± 9; ± 27 по схеме Горнера

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 3 & 9 & -27 \\ \hline +1 & -1 & 2 & 11 & -16 \\ -1 & -1 & 4 & 5 & -32 \\ +3 & -1 & 0 & 9 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = (\lambda - 3)\left(-\lambda^2 + 9\right) = 0.$$

Видно, что +1 и -1 не являются корнями характеристического уравнения, поскольку остаток от деления не равен нулю (-16 и -32 соответственно). Значение $\lambda_1 = 3$ по этой же причине является корнем.

Из оставшегося от деления квадратного уравнения $-\lambda^2 + 9 = 0$ найдем остальных два корня $\lambda_2 = 3;\ \lambda_3 = -3$. Т.о., корень $\lambda_{1,2} = 3$ является двукратным.

Для каждого собственного числа из $(A - \lambda E)x = 0$ найдем собственный вектор.

Для $\lambda_{1,2} = 3$ получим: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Второе и третье уравнения являются следствием первого, поэтому их удаляем. Оставшееся первое уравнение $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ имеет бесчисленное множество решений. Пусть $x_2 = c_1;\ x_3 = c_2$, тогда $x_1 = 2c_1 - c_2$.

Собственное подпространство для чисел $\lambda_{1,2} = 3$ является двумерным

$$x_{\lambda 12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2. \tag{13}$$

Выберем в этом подпространстве ортонормированный базис. Пусть первым вектором будет $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, который получается из (13) при $c_1 = 1;\ c_2 = 0$. Второй собственный вектор (13) $v_2 = \begin{pmatrix} 2c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ выберем из условия ортогональности $v_1^T v_2 = 0$, откуда получим: $2(2c_1 - c_2) + c_1 = 0$ или $5c_1 - 2c_2 = 0$. Это равенство выполняется при, например, $c_1 = 2;\ c_2 = 5$. Тогда $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы v_1 и v_2, соответствующие двукратному собственному значению $\lambda_{1,2} = 3$, ортогональны. Осталось их нормировать, разделив на их же нормы (модули или длины). В результате имеем:

$$v_{10} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad v_{20} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Для $\lambda_3 = -3$ имеем систему уравнений: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

После преобразований строк получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} +5 \cdot III \\ +2 \cdot III \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 12 & 24 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times \\ 1/6 \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг равен двум при трех неизвестных. Система также является недоопределенной и имеет бесчисленное множество решений

$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$; Пусть $x_3 = c$, тогда $x_2 = -2c$, а $x_1 = 2x_2 + 5x_3 = c$.

Собственный вектор v_3, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = -3$, имеет вид: $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} c$. Нормируя его, получим $v_{30} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Нетрудно убедиться, что этот вектор ортогонален первым двум.

В результате, ортогональная матрица и правило преобразования координат примут вид:

$$S_0 = \left(v_{10} v_{20} v_{30}\right) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S_0^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Сама же квадратичная форма в новом базисе определяется диагональной матрицей из собственных значений и принимает канонический вид:

$$A_0 = S_0^T \cdot A \cdot S_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad K = 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2. \qquad (15)$$

Выражения (14) и (15) определяют решение данной задачи.